

Pavadinimas. Duomenys ir jų interpretavimas
Dalykas. Matematika
Klasė 8
Pasiekimų sritis Apima visas tris pasiekimų sritis: gilus supratimas ir argumentavimas A1, A2, A3; matematinis komunikavimas B1, B2, B3; problemų sprendimas C1, C2, C3.
Mokymo(si) turinio tema Duomenys ir interpretavimas
Ilgalaikio plano dalis (nurodoma kokios temos/-ų prieš tai buvo mokomasi) Veiksmai su vektoriais
Valandų skaičius nurodytas ilgalaikiame plane 6
Mokymosi uždaviniai (pamatuojami) ir vertinimo kriterijai: <ol style="list-style-type: none"> 1. Gebėti tinkamai ir tikslingai vartoti aprašomosios statistikos sąvokas, faktus. 2. Gebėti tinkamai atlikti matematinės procedūras susijusias su duomenų rinkimu, jų grupavimu, vaizdavimu ir interpretacija. 3. Gebėti analizuoti paprastas problemines situacijas ir pasiūlyti modelį problemai išspręsti. 4. Gebėti analizuoti ir interpretuoti tekstu, lentelė, diagrama pateiktą informaciją. 5. Gebėti sukurti ir pristatyti matematinį pranešimą.
Galimi mokymo(si) metodai, siūloma veikla: Šešių pamokų konspektas, kurį mokytojai gali naudoti kaip dalijamąją medžiagą.
Siūloma papildoma medžiaga / literatūra / skaitmeninės mokymo priemonės (SMP): Matematika 11-12 Bendrasis kursas 2 knyga TEV 2008 psl.162-179. Matematika 12 Išplėstinis kursas 2 dalis TEV 2003 psl. 8-22.
Reikalingi materialiniai ir technologiniai ištekliai: Kompiuteris, kopijavimo aparatas, jei naudojama kaip dalijamoji medžiaga, projektorius.
Medžiagą parengė matematikos mokytojos metodininkės: Jurga Deveikytė, Lina Stasiūnaitė

Prisimename

1–7 klasėse susipažinote su pagrindinėmis statistikos sąvokomis, mokėtės rinkti, analizuoti ir vaizduoti duomenis.

Statistika – mokslo šaka, nagrinėjanti duomenų rinkimą, tvarkymą ir analizavimą.

Pakartokime pagrindines sąvokas, su kuriomis susiduriame rinkdami, tvarkydami ir analizuodami skaitinę informaciją (**duomenis**); prisiminkime, kaip jas taikyti atliekant užduotis.

Populiacija – visuma žmonių ar objektų, kurių požymiai yra tiriami. Atrinkta populiacijos dalis, kuri bus tirama, vadinama **imtimi**. Atrinktų, tyrime dalyvaujančių žmonių ar objektų skaičius, vadinamas **imties dydžiu**. Tyrimo metu surinkti duomenys dažnai taip pat vadinami **imtimi**.

Imties plotis – imties didžiausios duomens reikšmės ir mažiausios duomens reikšmės skirtumas.

Imties vidurkis – imties duomenų reikšmių sumos ir duomenų skaičiaus santykis. Kitaip sakant, imties vidurkis – duomenų reikšmių aritmetinis vidurkis.

Imties moda – dažniausiai pasikartojančio imties duomens reikšmė. Jei yra keletas imties duomenų reikšmių, kurios pasikartoja vienodą skaičių kartų, tai bus ir keletas imties modų. Jei visos duomenų reikšmės pasikartoja vienodą skaičių kartų, tai imtis modos neturi.

Variacinė eilutė – imties duomenų išdėstymas nemažėjimo tvarka.

Imties mediana – variacinės eilutės vidurinis narys, jei duomenų skaičius yra nelyginis arba dviejų vidurinių variacinės eilutės narių vidurkis, jei duomenų skaičius yra lyginis. (Mediana vadiname skaičių, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip pusė imties duomenų reikšmių ir ne mažiau kaip pusė reikšmių yra ne mažesni.)

Pavyzdys.

Dvidešimt Kalionių mokyklos aštuntos klasės mokinių važiavo į ekskursiją į Klaipėdą. Vaikščiodami jūros pakrante rinko gintarus. Kiekvienam pavyko rasti gintarėlių – vieniems daugiau, kitiems mažiau. Kai klasės seniūnas surašė, kiek gintarėlių surinko kiekvienas mokinys, gavo tokią skaičių eilutę:

2, 5, 9, 1, 11, 15, 12, 5, 2, 3, 6, 4, 5, 11, 9, 8, 2, 7, 2, 12.

Panagrinėkime aštuntokų surinktų gintarėlių imtį.

Imties aprašymas	Paiškinimas
Surinktų gintarėlių imtis: 2, 5, 9, 1, 11, 15, 12, 5, 2, 3, 6, 4, 5, 11, 9, 8, 2, 7, 2, 12.	Kiekvienas iš dvidešimties skaičių yra imties duomu.
Variacinė eilutė: 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 12, 12, 15.	Surinktų gintarėlių kiekiai surašyti nemažėjimo tvarka.
Imties dydis – 20.	Tiek duomenų yra šioje imtyje.

Imties plotis: $15 - 1 = 14$.													Didžiausio surinktų gитарėlių skaičiaus ir mažiausio surinktų gитарėlių skaičiaus skirtumas.
Imties duomenų dažnių lentelė:													Pirmoje eilutėje surašyti kiekvieno aštuntoko surinktas gитарėlių kiekis (didėjimo tvarka). Antroje eilutėje surašyta, kiek aštuntokų surinko atitinkamą gитарėlių kiekį.
Gitarėlių kiekis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	15	
Dažnis	1	4	1	1	3	1	1	1	2	2	2	1	
Imties moda yra 2.													Duomenų eilutėje dažniausiai (keturis kartus) pasikartoja skaičius 2.
Imties vidurkis yra $\frac{1 + 2 \cdot 4 + 3 + 4 + 5 \cdot 3 + 6 + 7 + 8 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 15}{20} = 6,55$													Visų surinktų gитарėlių skaičiaus ir rinkusių mokinių skaičiaus santykis.
Imties mediana yra $\frac{5 + 6}{2} = 5,5$													Duomenų skaičius lyginis (20), todėl mediana lygi dviejų vidurinių narių vidurkiui.

Uždaviniai

1. Daug statistinės informacijos galima rasti Lietuvos statistikos departamento tinklalapyje <https://osp.stat.gov.lt/> . Žemiau pateikta lentelė, kurioje surinkti duomenys apie vidutinę temperatūrą Biržuose ir Varėnoje. (<https://osp.stat.gov.lt/statistiniu-rodikliu-analize?indicator=S2R003#/>)

Vidutinė temperatūra

		Biržai			Varėna		
		metinė	sausio mėn.	liepos mėn.	metinė	sausio mėn.	liepos mėn.
Vidutinė temperatūra °C	2023	8,4	-0,3	17,3	8,7	0,9	17,9
	2022	7,7	-0,7	17,9	7,7	-0,8	17,6
	2021	7,2	-3,5	22,1	7,1	-3,5	21,7
	2020	9,1	2,7	17	9	1,9	17,8
	2019	8,5	-5,1	16,9	8,8	-4,4	17
	2018	7,6	-2,1	20	8	-1,9	19,8
	2017	7	-3,3	16,1	7,5	-4,4	16,7
	2016	7,4	-8,3	18,7	7,4	-7,2	18,5
	2015	8,2	-0,8	17	8,2	-0,6	17,5
	2014	7,8	-6,1	20,3	7,6	-6,1	19,6
	2013	7,3	-7	18,5	7,4	-6,5	18,3
	2012	6,5	-3,2	18,8	6,7	-3,6	19,6
	2011	7,6	-3,1	20,2	7,4	-2,7	19,2
	2010	6,1	-12	22,2	6,5	-10,6	21,7

Naudodamiesi šios lentelės duomenimis, atlikite užduotis:

- Nustatykite kelių metų duomenys pateikti lentelėje.
- Sudarykite Varėnos miesto metinės vidutinės temperatūros dažnių lentelę.
- Surašykite Biržų miesto liepos mėnesio vidutinės temperatūros duomenis variacine eilute.
- Raskite vidutinės liepos mėnesio temperatūros Biržų mieste medianą.
- Nustatykite, kuriame iš miestų 2010–2023 metais vidutinė metinė temperatūra buvo aukštesnė, tai yra palyginkite abiejų miestų vidutinės metinės temperatūros vidurkį.
- Ar galima nustatyti Varėnos miesto sausio mėnesio vidutinės temperatūros imties modą? Jei taip, užrašykite ją.

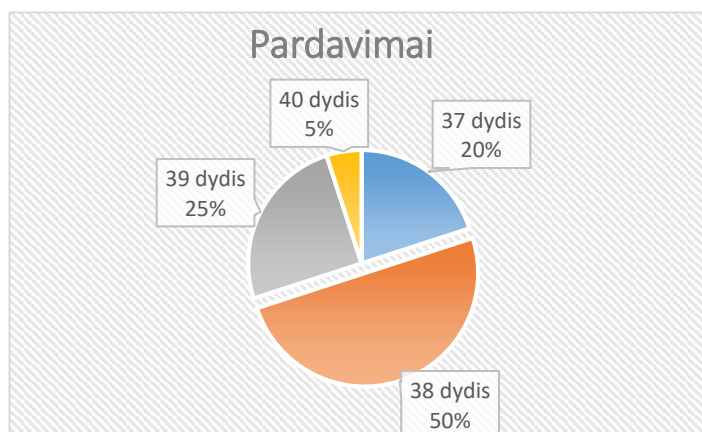
2. Benas surašė visus per mokslo metus gautus matematikos pažymius:

9, 10, 8, 9, 8, 6, 9, 8, 7, 8, 9, 7, 8.

Jo draugė Skirmantė, kuri mokosi matematinėje klasėje, taip pat surašė visus per mokslo metus gautus matematikos pažymius:

6, 10, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 9, 10, 10.

- Spėkite, kurio iš draugų matematikos pažymių vidurkis yra didesnis. Patikrinkite savo spėjimą skaičiuodami.
 - Beno gautus pažymius pavaizduokite stulpeline diagrama.
 - Skirmantės gautus įvertinimus pavaizduokite skrituline diagrama.
 - Nustatykite Beno matematikos pažymių modą.
 - Kokia yra Skirmantės gautų pažymių imties mediana?
3. Batų parduotuvė vieną savaitę fiksavo populiariausių dydžių moteriškų batų pardavimus. Iš viso buvo parduota 40 porų batų. Parduotų batų kiekiai pavaizduoti skrituline diagrama.



Remdamiesi ja atlikite užduotis.

- Apskaičiuokite, kiek kiekvieno dydžio batų porų buvo parduota.
- Užrašykite parduotų batų porų dydžių imtį variacine eilute.
- Raskite šios imties plotį.
- Ar ši imtis turi modą? Jei taip, užrašykite ją.
- Raskite šios imties medianą.

Histogramos

Jau mokate surinktus duomenis vaizduoti stulpeline ir skrituline diagramomis, kurios labai tinka, kai norime pavaizduoti Beno matematikos pažymių imtį. Bet, jei surenkama labai daug duomenų, nei stulpelinė, nei skritulinė diagrama nepadedą suprasti sukauptos informacijos. Jei 20 tūkstančių Europos Sąjungos gyventojų apklaustume, kiek vidutiniškai minučių per parą jie praleidžia socialiniuose tinkluose, gautume daug skirtingų atsakymų. Nusprendę gautus apklausos duomenis pavaizduoti stulpeline diagrama, turėtume braižyti labai daug stulpelių. Gauta diagrama nebūtų informatyvi. Todėl, kai duomenų reikšmės yra labai įvairios, surinkti duomenys yra grupuojami į intervalus, o po to braižoma **sugrupuotų duomenų stulpelinė diagrama**.

Panagrinėkime pavyzdį.

Visi keturiasdešimt keturi Kalionių miestelio progimnazijos aštuntokai dalyvavo Europos Sąjungos sveikatingumo tyrime. Jo metu buvo išmatuotas kiekvieno aštuntoko ūgis centimetrais. Štai tyrimo rezultatai:

181, 170, 155, 162, 170, 184, 171, 178, 199, 150, 161,
175, 183, 160, 192, 201, 185, 172, 173, 162, 188, 190,
183, 170, 168, 166, 193, 204, 159, 172, 169, 184, 185,
153, 189, 174, 176, 187, 162, 162, 191, 154, 183, 172.

Gauta daug skirtingų duomenų. Mažiausias imties duomuo yra 150, o didžiausias – 204. Pasirinkime, į kiek intervalų (dažniausiai imama nuo penkių iki penkiolikos intervalų) grupuosime duomenis. Pabandykime sugrupuoti duomenis į penkis vienodo ilgio intervalus.

Raskime didžiausios ir mažiausios imties duomenų reikšmių skirtumą ir padalinkime iš intervalų skaičiaus:

$$(204 - 150) : 5 = 10,8.$$

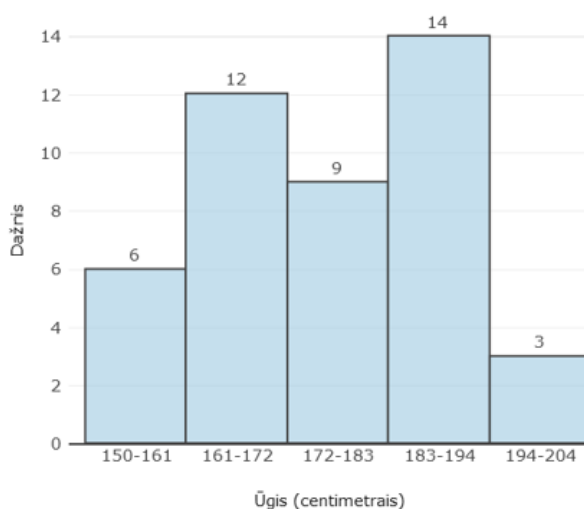
Gauname nesveiką skaičių, todėl nepatogu skaičiuoti, kiek į tokio ilgio intervalą patenka duomenų. Paskutinį intervalą padidinkime iki 205 (kadangi tokio duomens nėra, tai mūsų imtis neišsikreipia). Gauname, kad kiekvieno intervalo ilgis yra

$$(205 - 150) : 5 = 11.$$

Sudarykime **sugrupuotų duomenų dažnių lentelę**. Kiekvienas duomuo turi priklausyti tik vienam intervalui.

Intervalas	[150; 161)	[161; 172)	[172; 183)	[183; 194)	[194; 205]
Dažnis	6	12	9	14	3

Nubraižykime sugrupuotų duomenų dažnių stulpelinę diagramą. Tokia sugrupuotų imties dažnių stulpelinė diagrama vadinama **histograma**.



Iš sugrupuotų imties dažnių lentelės ar histogramos galima įvertinti, koks galėtų būti į intervalą patekusių duomenų vidurkis. Į intervalą [150; 161) patenka šeši duomenys. Didžiausias galimas duomenų vidurkis būtų 160, jei visų šešių duomenų reikšmės būtų lygios 160. Mažiausias to paties intervalo vidurkis galėtų būti 150. Vidurinis intervalo duomuo 155 šiame pavyzdyje reprezentuotų šį intervalą.

Dažnai pateikiama ir sugrupuotų duomenų santykinų dažnių diagrama, kuri taip pat vadinama histograma. **Santykinis dažnis** – imties duomens dažnio ir visų imties duomenų skaičiaus santykis.

Turėtą sugrupuotų duomenų dažnių lentelę papildykime santykiniais dažniais.

Intervalas	[150; 161)	[161; 172)	[172; 183)	[183; 194)	[194; 205]
Dažnis	6	12	9	14	3
Santykinis dažnis	$\frac{6}{44}$	$\frac{12}{44}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{14}{44}$	$\frac{3}{44}$

Jeigu sugrupuotų duomenų santykinų dažnių diagramos stačiakampių plotų suma lygi vienam, tai tokia diagrama yra **empirinio tankio diagrama**.

Panagrinėkime pavyzdį.

Dvidešimt Kalionių progimnazijos mokinių dalyvavo apklausoje „Kiek knygų perskaitei per šiuos metus?“. Gauti tokie rezultatai:

2, 10, 15, 4, 1, 12, 18, 15, 5, 2, 1, 7, 20, 5, 4, 1, 2, 10, 11, 4.

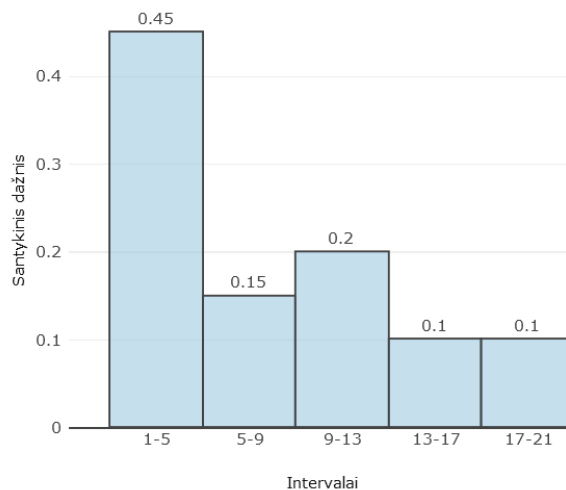
Šiuos duomenis pavaizduokime empirinio tankio diagrama. Imdami kaip paskutinį imties duomenį 21, sugrupuokime duomenis į penkis intervalus. Intervalo ilgis bus:

$$(21 - 1) \div 5 = 4$$

Sudarykime sugrupuotų duomenų dažnių ir santykinų dažnių lentelę.

Intervalas	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21]
Dažnis	9	3	4	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$

Sugrupuotų duomenų santykinų dažnių diagrama atrodytų taip:

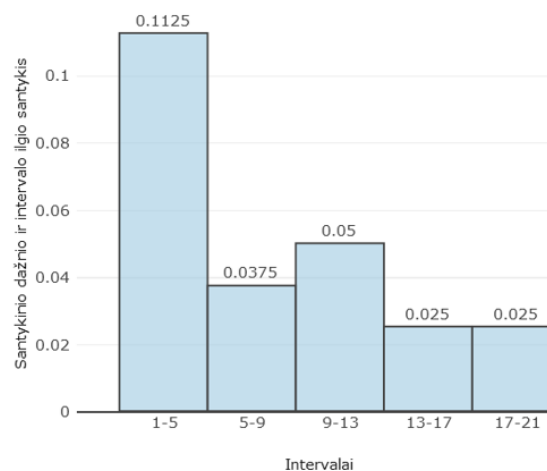


Apskaičiuokime diagramos stačiakampių plotų sumą:

$$4 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 = 4.$$

Gauta suma nelygi vienam, todėl gautoji diagrama nėra empirinio tankio diagrama. Kiekvieno stačiakampio plotis yra lygus 4. Jei kiekvieno stačiakampio plotą sumažintume keturis kartus, tai stačiakampių plotų suma taptų lygi vienam. Todėl lentelę papildę santykinų dažnių ir intervalo ilgio santykiais, nubraižykime diagramą.

Intervalas	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21]
Dažnis	9	3	4	2	2
Santykinis dažnis	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$
Santykinio dažnio ir intervalo ilgio santykis	$\frac{9}{80} = 0,1125$	$\frac{3}{80} = 0,0375$	$\frac{4}{80} = 0,05$	$\frac{2}{80} = 0,025$	$\frac{2}{80} = 0,025$



Apskaičiuokime stačiakampių plotų sumą:

$$4 \cdot 0,1125 + 4 \cdot 0,0375 + 4 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,025 + 4 \cdot 0,025 = 1.$$

Gauta suma lygi vienam, todėl gautoji diagrama yra **empirinio tankio diagrama**.

Uždaviniai

1. Kalionių progimnazijos aštuntokai paklausti, kiek vidutiniškai minučių per parą žaidžia kompiuterinius žaidimus, pateikė tokius atsakymus:

20, 100, 10, 180, 120, 0, 45, 60, 20, 40, 10,
5, 150, 45, 60, 20, 0, 180, 200, 15, 0, 120,
0, 80, 100, 0, 120, 180, 150, 0, 10, 20, 20,
100, 10, 0, 0, 25, 40, 60, 60, 120, 0, 5.

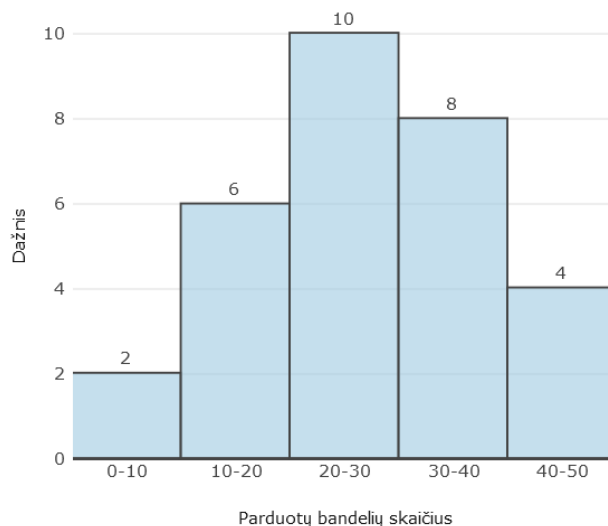
- 1.1. Sugrupuokite duomenis į intervalus:
[0; 30), [30; 60), [60; 90), [90; 120), [120; 150), [150; 180), [180; 210].
- 1.2. Sudarykite sugrupuotų duomenų dažnių lentelę.
- 1.3. Pavaizduokite sugrupuotus duomenis histograma.
- 1.4. Suradę imties medianą, nustatykite, ar ji priklauso intervalui [30; 60).

2. Kalionių progimnazijos administracija registravo, kiek dienų per mėnesį dėl ligos praleidžia 8A klasės mokiniai. Gauti tokie rezultatai:

3, 0, 0, 1, 5, 2, 0, 0, 7, 2, 0, 4, 3, 5, 0, 0, 1, 2, 0, 0.

- 2.1. Sugrupuokite šiuos duomenis į keturis vienodo ilgio intervalus.
- 2.2. Sudarykite sugrupuotų dažnių ir santykinų dažnių lenteles.
- 2.3. Nubraižykite sugrupuotų santykinų dažnių diagramą.

3. Viena Vilniaus kepyklėlė mėnesį rinko duomenis, kiek parduodama bandelių su cinamonu ir varške. Duomenys pavaizduoti histograma:



Naudodamiesi histogramos duomenimis atsakykite į klausimus.

- a) Kiek dienų vyko duomenų rinkimas?
- b) Kiek daugiausia ir kiek mažiausia galėjo būti parduota bandelių per dieną?
- c) Kuriam intervalui priklauso per mėnesį parduotų bandelių skaičių mediana?
- d) Ar galima tiksliai nustatyti, kiek daugiausia per dieną buvo parduota bandelių? Kodėl?
- e) Jei kepyklėlės savininkas apsispręs ir toliau kepti bandeles su cinamonu ir varške, kokį kiekį jūs rekomenduotumėt kepti? Kodėl?

Kvartiliai

Kai duomenų yra labai daug, juos patogiau tyrinėti mažesniais dalimis.

Panagrinėkime pavyzdį.

Skirmantė lanko orientacinio sporto būrelį. Ji ruošiasi dalyvauti tarptautinėse varžybose, todėl vakarais bėgioja papildomai: penkis vakarus bėgioja, po to du ilsisi. Visą mėnesį Skirmantė fiksavo, kiek papildomai kilometrų nubėgo kiekvieną vakarą. Štai jos rezultatai:

5, 10, 10, 5, 7, 15, 10, 3, 7, 5, 10, 15, 5, 5, 10, 7, 3, 5, 10, 5.

Surašykime šiuos duomenis variacine eilute:

3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15.

Raskime imties medianą. Imtį sudaro dvidešimt duomenų, todėl mediana bus lygi dešimtojo ir vienuoliktojo narių aritmetiniam vidurkiui, tai yra $M_d = \frac{7+7}{2} = 7$. Mediana kartais dar vadinama antruoju kvartiliu ir žymima Q_2 .

M_d
3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 7, $\left| 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15.$

Mediana variacinę eilutę padalina pusiau. Apskaičiuokime šių abiejų dalių medianas.

Variacinės eilutės pirmoji dalis:

Q_1
3, 3, 5, 5, 5, $\left| 5, 5, 5, 5, 7.$

Pirmosios dalies mediana lygi $\frac{5+5}{2} = 5$. Ji žymima Q_1 ir vadinama pirmuoju kvartiliu.

Variacinės eilutės antroji dalis:

Q_3
7, 7, 10, 10, 10, $\left| 10, 10, 10, 15, 15.$

Antrosios dalies mediana lygi $\frac{10+10}{2} = 10$. Ji žymima Q_3 ir vadinama trečiuoju kvartiliu.

Taip visą variacinę eilutę padalinome į keturias dalis, kurių kiekvienoje yra ketvirtadalis duomenų.

Q_1 M_d Q_3
3, 3, 5, 5, 5, $\left| 5, 5, 5, 5, 7, \left| 7, 7, 10, 10, 10, \left| 10, 10, 10, 15, 15.$

Panagrinėkime dar vieną pavyzdį.

Domas žaidžia šachmatais. Šiais mokslo metais jis dalyvavo devyniose varžybose. Domo laimėtų partijų skaičius šiose varžybose buvo:

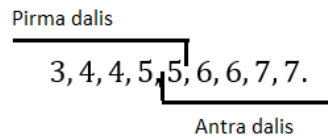
5, 7, 6, 4, 6, 3, 7, 5, 4.

Apskaičiuokime imties pirmąjį, antrąjį ir trečiąjį kvartilius.

Pirmiausia išdėstykime duomenis variacine eilute:

3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7.

Mediana yra vidurinis variacinės eilutės narys lygus 5, tai yra $M_d = 5$. Kadangi imtį sudaro nelyginis narių skaičius, tai variacinės eilutės pirmoji ir antroji dalys sudaroma taip:



Taigi, pirmasis kvartilis $Q_1 = 4$, antrasis kvartilis $Q_2 = 5$, o trečiasis kvartilis, $Q_3 = 6$.

Pirmasis kvartilis (Q_1) – tai skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų reikšmių ir ne mažesni ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai reikšmių.

Trečiasis kvartilis (Q_3) – tai skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų reikšmių ir ne mažesni ne mažiau kaip ketvirtadalis reikšmių.

Uždaviniai

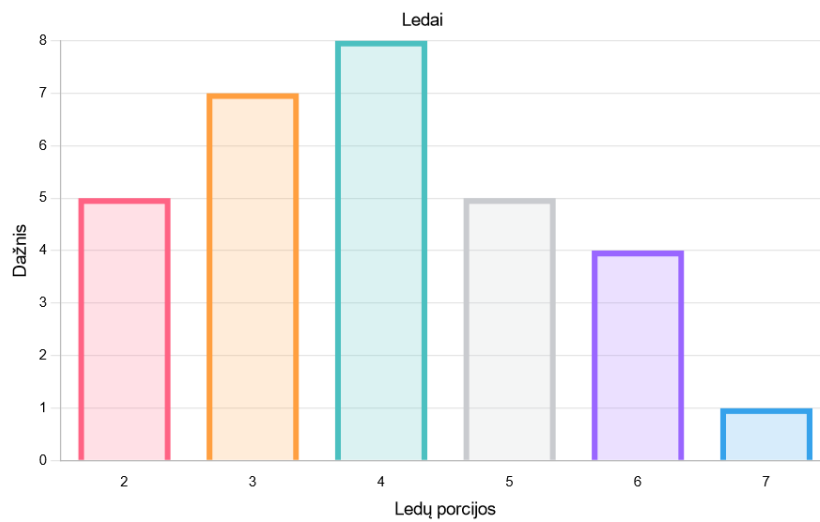
1. Beno mama dirba Biržų mieste privačioje įmonėje finansinke. Vasario mėnesį įmonė paskelbė sausio mėnesio darbuotojų atlyginimus eurais (neatskaičius mokesčių):

800, 1513, 1415, 3010, 800, 1524, 4850, 800, 800, 1513, 2765, 1100, 800, 800.

- 1.1. Surašykite duomenis variacine eilute.
 - 1.2. Raskite vidutinį šios įmonės darbo užmokestį sausio mėnesį.
 - 1.3. Raskite imties medianą ir kvartilius.
 - 1.4. Žinodami, kad Beno mama uždirba 2765 eurų per mėnesį, įrodykite, kad jos atlyginimas didesnis už 75% darbuotojų atlyginimus (remkitės kvartiliais).
 - 1.5. Keliais procentais Beno mama uždirba daugiau nei įmonės vidutinis darbo užmokestis?
2. Kalionių miestelio aštuntokų krepšinio rinktinė dalyvauja regioninėje savo amžiaus Lietuvos čempionato lygoje. Praeitais metais šios komandos per rungtynes surinktų taškų skaičius buvo:

40, 51, 48, 59, 62, 38, 55, 61, 49, 66, 60, 43.

- 2.1. Surašykite duomenis variacine eilute.
 - 2.2. Raskite medianą ir kvartilius.
 - 2.3. Ar tiesa, kad 61 patenka į paskutinį variacinės eilutės ketvirtį?
 - 2.4. Kiek vidutiniškai taškų pelnydavo aštuntokai per rungtynes?
 - 2.5. Komanda pakliuvo į atkrintamąsias varžybas ir sužaidė dar vienas rungtynes. Kiek taškų pelnė Kalionių jaunieji krepšininkai, jei per rungtynes komandos pelnytų taškų vidurkis tapo 54?
3. Kalionių parduotuvėlė gavo naujų cukraus vatos skonio ledų. Jų pardavimai per pirmąsias trisdešimt dienų pavaizduoti stulpelinėje diagramoje:



- a) Kiek iš viso buvo parduota cukraus vatos skonio ledų porcijų?
- b) Kiek vidutiniškai per dieną buvo parduota cukraus vatos skonio ledų porcijų?
- c) Raskite cukraus vatos skonio ledų pardavimo kiekio imties medianą ir kvartilius.

Duomenų vaizdavimas stačiakampe diagrama (su „ūsais“)

Labai patogiu visą žinomą skaitinę informaciją apie imtį vaizduoti stačiakampe diagrama su „ūsais“.

Panagrinėkime pavyzdį.

Benas norėtų studijuoti inžineriją. Todėl jam reikės laikyti fizikos egzaminą. Benas nusprendė panagrinėti per mokslo metus gautus fizikos pažymius:

4, 9, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 10, 5, 8, 6.

Juos surašęs variacine eilute:

4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10,

apskaičiavo duomenų variacinės eilutės medianą:

$$M_d = \frac{8+8}{2} = 8.$$

Po to nustatė pirmąjį ir trečiąjį imties kvartilius.

Pirmoji variacinės eilutės dalis: 4, 5, 6, 6, 7, 8.

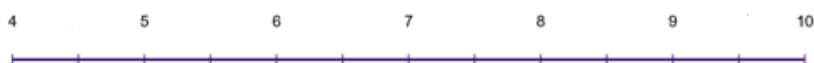
$$Q_1 = \frac{6+6}{2} = 6.$$

Antroji variacinės eilutės dalis: 8, 8, 9, 9, 10, 10.

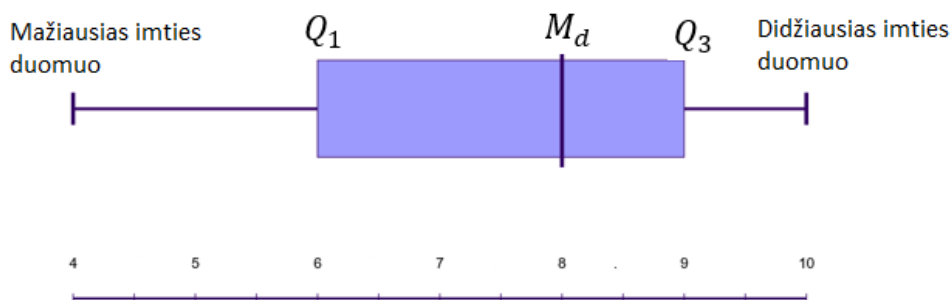
$$Q_3 = \frac{9+9}{2} = 9.$$

Pavaizduokime Beno per mokslo metus gautų fizikos pažymių imties mažiausiojo ir didžiausiojo duomens reikšmes, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

Nubraižykime skaičių tiesės dalį:



Virš jos nedidelėmis atkarpomis pažymėkime mažiausiąjį ir didžiausiąjį imties duomenį, gautuosius pirmąjį ir trečiąjį kvartilius bei medianą. Pirmąjį ir trečiąjį kvartilius sujungiamo ir nubraižome stačiakampį.



Tai ir yra **stačiakampė diagrama „su ūsais“**. Ji dažnai naudojama statistikoje, nes joje aiškiai matyti pagrindinės skaitinės imties charakteristikos.

Iš Beno fizikos pažymių stačiakampės diagramos „su ūsais“ iš karto galima nustatyti tokias imties skaitines charakteristikas:

Mažiausias imties duomuo	4
Didžiausias imties duomuo	10
Pirmasis kvartilis	6
Antrasis kvartilis (mediana)	8
Trečiasis kvartilis	9

Stačiakampėmis diagramomis „su ūsais“ galima vaizduoti labai didelės apimties imtis. Nubraižius kelių imčių tokias diagramas greta, patogiau imtis palyginti.

Palyginkime Beno ir Skirmantės gautų fizikos pažymių imtis.

Per mokslo metus Skirmantė gavo tokius fizikos pažymius:

9, 9, 8, 5, 8, 8, 7, 7, 9, 7, 8, 8.

Jos pažymių variacinė eilutė atrodys taip:

5, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9.

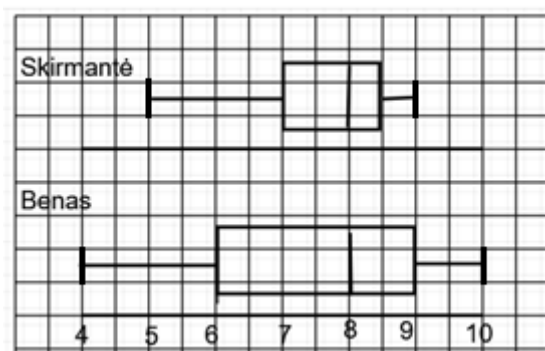
Skirmantės fizikos pažymių imties mediana $M_d = \frac{8+8}{2} = 8$ lygi Beno fizikos pažymių imties medianai.

Raskime Skirmantės fizikos pažymių imties pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

Pirmoji variacinės eilutės dalis: 5, 7, 7, 7, 8, 8. $Q_1 = \frac{7+7}{2} = 7$.

Antroji variacinės eilutės dalis: 8, 8, 8, 9, 9, 9. $Q_3 = \frac{8+9}{2} = 8,5$.

Nubraižykime vieną po kita stačiakampes diagramas su „ūsais“:



Iš brėžinio gerai matyti, kad Skirmantės ir Beno fizikos pažymių imčių medianos sutampa, bet Beno pažymių išsibarstymas didesnis.

Stačiakampėje diagramoje „su ūsais“ lengva matyti, ar yra duomenų, kurie stipriai išsiskiria iš kitų: kuo didesnis atstumas tarp kvartilį žyminčios atkarpos ir „ūso“ galo, tuo išskirtis didesnė.

Pavyzdys.

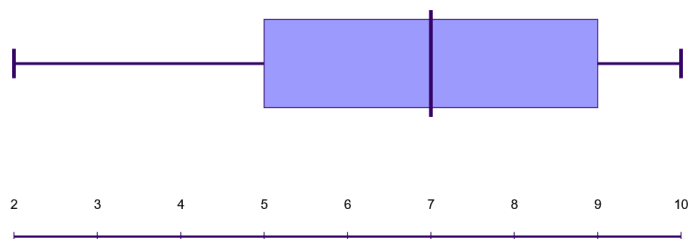
Benas yra Kalionių aštuntokų krepšinio rinktinės gynėjas. Jam treneris patiki stipriausių varžovų gynybą, todėl Benas retai pelno daug taškų. Regioninėje lygoje Beno pelnytų taškų skaičius yra:

2, 5, 31, 10, 8, 9, 8, 7, 10, 6, 3, 7.

Pavaizduokime šiuos duomenis stačiakampe diagrama „su ūsais“:



Iš diagramos matome, kad maždaug 75% rungtynių Benas pelno mažiau nei po 10 taškų. Matome ir vieną išskirtį – 31 pelnytą tašką. Jei į statistinius duomenis šio duomens neįtrauktume, tai Beno pelnytų taškų stačiakampė diagrama „su ūsais“ atrodytų taip:



Tokia diagrama tiksliau atspindėtų Beno pelnomus taškus per rungtynes.

Uždaviniai

1. Kalionyse dažnai lyja. Todėl aštuntokai pasirinko daryti metinį geografijos projektą, skirtą tyrinėti, kiek dienų kiekvieną mėnesį pasirodė saulė. Gavo tokius rezultatus:

5, 6, 8, 8, 10, 12, 15, 16, 13, 10, 8, 6.

Remdamiesi šiais rezultatais atlikite užduotis.

1.1. Užrašykite imtį variacine eilute.

1.2. Raskite šios imties modą ir vidurkį.

1.3. Raskite imties medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

1.4. Pavaizduokite imties skaitines charakteristikas stačiakampe diagrama su „ūsais“.

2. Kalionių progimnazijos aštuntokai nusprendė palyginti saulėtų dienų skaičių Kalionyse su saulėtų dienų skaičiumi sostinėje. Statistinius duomenis apie saulėtas dienas Vilniuje tikėjosi rasti Statistikos departamento duomenų bazėje. Didelei jų nuostabai, tokios informacijos rasti nepavyko. Pasirinkę arčiausiai Kalionių esantį miestą – Biržus, palygino jame iškritusių kritulių

kiekį per metus su Vilniuje iškritusių kritulių kiekiu per tą patį laiką. Duomenys pateikti lentelėje (<https://osp.stat.gov.lt/statistiniu-rodikliu-analize#/>).

		Biržai	Vilnius
Krituliai per metus mm ¹	2023	666	674
	2022	609	728
	2021	722	732
	2020	651	563
	2019	606	536
	2018	442	541
	2017	779	899
	2016	723	686
	2015	558	593
	2014	645	613
	2013	553	674
	2012	837	763

Remdamiesi pateikta lentele, nubraižykite dvi stačiakampes diagramas „su ūsais“, kurios vaizduotų Biržuose ir Vilniuje iškritusių kritulių per metus imčių skaitines charakteristikas. Padarykite išvadą, kur gyventi „sausiau“.

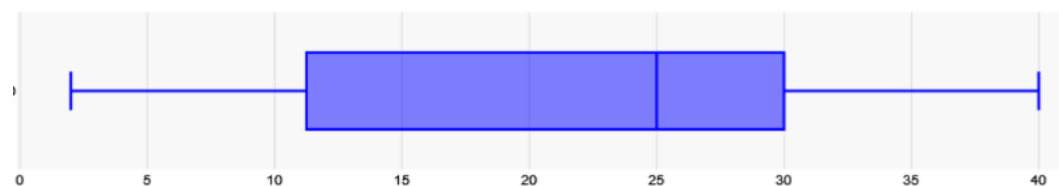
3. Benas domisi sportiniais automobiliais, todėl kolekcionuoja žurnalus apie automobilius. Stačiakampėje diagramoje „su ūsais“ pavaizduotos žurnalų apie automobilius kainos:



Naudodamiesi šia diagrama, atsakykite į klausimus.

- Kiek kainavo pigiausias žurnalas?
- Kiek kainavo brangiausias žurnalas?
- Ar tiesa, kad apytiksliai 75% žurnalų kainuoja pigiau nei 10 eurų? Kodėl taip galvojate?
- Ar iš diagramos galime nustatyti, kiek žurnalų buvo prekyboje?

4. Stačiakampėje diagramoje „su ūsais“ pavaizduotas Kalionių progimnazijoje dirbančių mokytojų darbo stažas:



Kiek apytiksliai procentų mokytojų turi didesnę nei 25 metų darbo stažą?

- A 25% B 50% C 75% D 100%

Sukaaptasis dažnis, sukaaptasis santykinis dažnis

Jau susipažinote su dažniais ir santykiniais dažniais. Šiame skyrelyje nagrinėsime sukaaptąjį dažnį ir sukaaptąjį santykinį dažnį.

Skirmantė per metus gavo tokius lietuvių kalbos įvertinimus:

9, 10, 7, 9, 8, 6, 8, 8, 7, 7, 9, 7, 7, 10, 9, 8, 10, 7, 8, 8.

Šios imties dažnių lentelė atrodytų taip:

Pažymys	6	7	8	9	10
Dažnis	1	6	6	4	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$

Dažnai dažnių lentelė papildoma dar dviem eilutėmis:

Pažymys	6	7	8	9	10
Dažnis	1	6	6	4	3
Santykinis dažnis	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$
Sukaaptasis dažnis	1	$1 + 6 = 7$	$1 + 6 + 6 = 13$	$1 + 6 + 6 + 4 = 17$	$1 + 6 + 6 + 4 + 3 = 20$
Sukaaptasis santykinis dažnis	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{20}$	$\frac{1}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{13}{20}$	$\frac{1}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{4}{20} = \frac{17}{20}$	$\frac{1}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{20}{20} = 1$

Sukauptojo dažnio eilutėje esantis skaičius parodo, kiek yra pažymių ne didesnių už pažymio eilutėje esantį skaičių. (Sukauptojo dažnio eilutėje esantis skaičius 13 parodo, kad yra 13 įvertinimų ne didesnių nei 8.) Visų sukauptųjų dažnių suma yra lygi imties dydžiui (duomenų skaičiui). O visų sukauptųjų santykinį dažnių suma yra lygi 1.

Sukauptųjų dažnių lentelės duomenys vaizduojami linijine diagrama.



Analogiškai vaizduojami ir sukauptųjų santykinį dažnių lentelės duomenys.

Uždaviniai

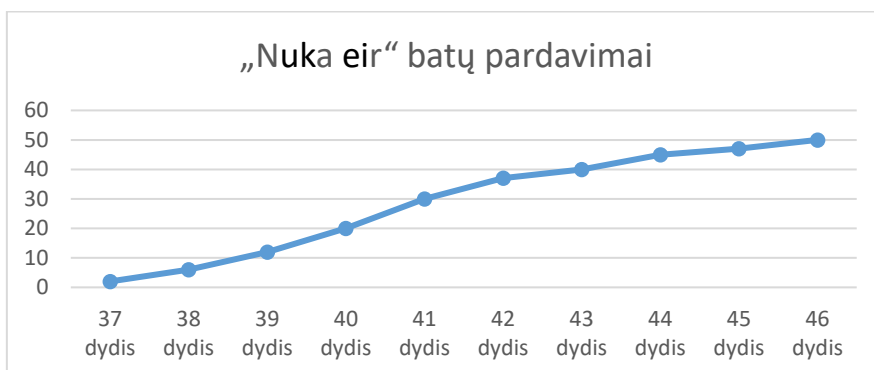
1. Beno brolis dirba nedidelėje Kalionių miestelio dronų gamykloje. Joje surenkami dronai, galintys pristatyti nedidelius siuntinukus. Įmonė gavo užsakymą surinkti 100 dronų. Žinodami, kad įmonė užsakymą baigė vykdyti birželį, pabaikite pildyti lentelę.

Mėnuo	sausis	vasaris	kovas	balandis	gegužė	birželis
Dronų skaičius (dažnis)	15			15	25	
Santykinis dažnis		$\frac{12}{100}$				
Sukauptasis dažnis			40			
Sukauptasis santykinis dažnis						1

2. Beno mamos įmonė kartu su gruodžio algomis mokėjo ir premijas. Todėl tą mėnesį įmonės darbuotojų atlyginimai buvo tokie:

900, 1653, 1615, 3510, 900, 1624, 5050, 900, 900, 1613, 2965, 1200, 900, 900.

- 2.1. Užpildykite gruodžio mėnesio atlyginimų dažnių, santykinių dažnių, sukauptųjų dažnių ir sukauptųjų santykinių dažnių lenteles.
- 2.2. Pasirinkę tinkamą mastelį, nubraižykite atlyginimų sukauptųjų dažnių diagramą.
- 2.3. Iš diagramos nustatykite, kiek žmonių uždirba daugiau nei Beno mama, jei jos atlyginimas gruodžio mėnesį buvo 2965 eurų.
3. Žemiau pateikta *sukauptųjų dažnių diagrama*, vaizduojanti suaugusiųjų sportinių batų pardavimus per mėnesį. Remdamiesi ja, atsakykite į klausimus:



- a) Kiek iš viso batų porų buvo parduota?
- b) Kiek parduota 41 dydžio batų?
- c) Kiek parduota mažesnių nei 41 dydžio batų porų?
- d) Nustatykite šios imties modą.

Praktinis darbas

Pasirinkę apskritį, individualiai, poromis arba grupėse atlikite užduotis. (Statistiniai duomenys paimti iš <https://osp.stat.gov.lt/statistiniu-rodikliu-analize#/>).

Mėnesinis gyvų gimusių kūdikių skaičius

		Alytaus apskritis	Kauno apskritis	Klaipėdos apskritis	Marijampolės apskritis	Panevėžio apskritis	Šiaulių apskritis	Tauragės apskritis
Mėnesinis gyvų gimusių kūdikių skaičius asmenys ^{1,2}	2023M12	47	317	206	66	100	116	39
	2023M11	62	325	195	67	83	139	36
	2023M10	51	347	195	62	96	141	38
	2023M09	69	357	199	86	99	146	51
	2023M08	61	412	246	76	104	143	57
	2023M07	69	421	216	91	139	173	53
	2023M06	63	380	230	73	115	127	42
	2023M05	64	393	217	66	136	166	51
	2023M04	58	339	209	46	100	139	47
	2023M03	47	393	221	77	114	148	49
	2023M02	57	322	203	73	106	147	53
	2023M01	76	375	202	74	106	151	58
	2022M12	50	358	212	58	89	146	40
	2022M11	56	355	193	71	88	98	33
	2022M10	62	379	204	71	109	168	58
	2022M09	71	435	246	80	101	167	58
	2022M08	62	402	245	78	114	146	46
	2022M07	74	481	228	73	128	186	64
	2022M06	68	440	255	90	113	163	53
	2022M05	67	401	237	84	108	177	59
2022M04	62	386	207	71	103	144	68	
2022M03	70	396	224	79	109	140	61	
2022M02	52	357	180	70	94	127	56	
2022M01	55	361	239	74	93	164	46	

1. Surašykite pasirinktos apskrities duomenis apie gyvus gimusius kūdikius variacine eilute.
2. Suskirstykite duomenis į vienodo ilgio intervalus (intervalų skaičius nuo 5 iki 8).
3. Sudarykite sugrupuotų duomenų dažnių ir santykinų dažnių lenteles.
4. Nubraižykite sugrupuotų duomenų santykinų dažnių histogramą.
5. Raskite imties medianą ir kvartilius.
6. Nubraižykite stačiakampę diagramą „su ūsais“.
7. Padarykite imties sukautųjų dažnių ir sukauptųjų santykinų dažnių lenteles.
8. Nubraižykite sukauptųjų dažnių linijinę diagramą.